Convexité rationnelle des sous-variétés immergées lagrangiennes

Damien Gayet

1[er] février 2008

Abstract

We prove that a compact, immersed, submanifold of $\mathbb{C}^n$, lagrangian for a Kähler form, is rationally convex, generalizing a theorem of Duval and Sibony for embedded submanifolds.

Résumé

Nous démontrons qu'une sous-variété compacte, immergée dans $\mathbb{C}^n$ et lagrangienne pour une forme de Kähler, est rationnellement convexe, généralisant ainsi un théorème de Duval et Sibony pour des sous-variétés plongées.

Mots-clefs : Convexité rationnelle, Variété lagrangienne immergée, Estimées L^2 de Hörmander.
Code matière AMS : 32E20-32F20

1 Introduction

Soit X un compact dans $\mathbb{C}^n$. On considère l'enveloppe rationnelle $r(X)$ de X. Un point x est dans $r(X)$ si et seulement si toute hypersurface algébrique passant par x rencontre X. Le compact X est *rationnellement convexe* si $r(X) = X$, i.e si son complémentaire est réunion d'hypersurfaces évitant X. Un des intérêts de cette notion réside dans la généralisation du théorème de Runge :

Théorème *(Oka, Weil) Toute fonction holomorphe au voisinage d'un compact rationnellement convexe peut être approchée uniformément sur le compact par des fractions rationnelles.*

Une obstruction classique à la convexité rationnelle repose sur le fait suivant : *Une surface de Riemann Σ compacte à bord, telle que $\partial\Sigma$ borde une surface V dans X, est contenue dans $r(X)$.*

En effet, soit C une hypersurface passant par un point de Σ. Les intersections de C avec Σ sont toujours positives, donc l'intersection homologique des deux ensembles analytiques est non nulle. La surface formée par la réunion de Σ et de V étant fermée, l'intersection homologique de C avec $\Sigma \cup V$ est nulle. Par conséquent C rencontre X.

Une forme ω de bidegré $(1,1)$ dans $\mathbb{C}^n$ est de Kähler si elle est fermée et strictement positive. Une sous-variété réelle S de $\mathbb{C}^n$ est dite isotrope (lagrangienne si $\dim_{\mathbb{R}} S = n$) pour ω si la forme s'annule tangentiellement à S. En d'autres termes, $j^*\omega = 0$, où $j : S \to \mathbb{C}^n$ est l'inclusion de S dans $\mathbb{C}^n$. La sous-variété S est alors nécessairement totalement réelle, i.e jamais tangente à une droite complexe. Si S est isotrope pour ω, il n'existe pas de surface de Riemann du type précédent. En effet, puisque ω est exacte, $\int_V \omega = -\int_\Sigma \omega$, où la première intégrale est nulle, et la seconde strictement négative.

En 1995, J. Duval et N. Sibony ([Du,Si], voir aussi [Du] dans le cas des surfaces) prouvent le résultat suivant :

Théorème *Une sous-variété S compacte et lisse, plongée dans $\mathbb{C}^n$, isotrope pour une forme de Kähler, est rationnellement convexe.*

La réciproque, facile, est vraie : une sous-variété totalement réelle rationnellement convexe est isotrope pour une certaine forme de Kähler.

Il est naturel de s'intéresser aux sous-variétés lagrangiennes compactes seulement immergées dans $\mathbb{C}^n$, car les plongements lagrangiens sont relativement rares. Par exemple, dans son article fondateur [Gr] de 1985, Gromov prouve que dans $\mathbb{C}^n$, il n'existe pas de sous-variété fermée exacte pour la forme standard ω_0 (i.e $j^*d^c|z|^2$ est non seulement fermée sur S mais aussi exacte). En particulier, il n'existe pas de sous-variété fermée simplement connexe, et donc de sphère S^n pour $n \geq 2$, lagrangienne plongée dans $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$. Cependant les sphères lagrangiennes *immergées* existent. L'exemple le plus simple est l'immersion de Whitney :

$$\begin{array}{rrl} j: & S^n \to & \mathbb{C}^n \\ & (x,y) \mapsto & j(x,y) = (1+iy)x \end{array}$$

où S^n est la sphère unité de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. La sphère immergée $j(S^n)$ présente un point double en 0, et est lagrangienne pour la forme standard.

Nous traiterons ici le cas des sous-variétés lagrangiennes compactes immergées *génériques*, qui possèdent alors un nombre fini de points doubles ordinaires (transverses). Nous obtenons ainsi le :

Théorème *Une sous-variété de dimension n compacte, lisse, immergée dans $\mathbb{C}^n$, lagrangienne pour une forme de Kähler ω, et possédant un nombre fini de points doubles transverses, est rationnellement convexe.*

Remarque : En fait, le résultat est valable dans le cas de points multiples avec un nombre fini de branches transverses.

1.1 Résumé de la démonstration du cas plongé

Soit S une sous-variété compacte lagrangienne pour une forme de Kähler ω dans $\mathbb{C}^n$. La démonstration présentée dans [Du, Si] pour prouver que S est rationnellement convexe s'effectue en deux grandes étapes. La première consiste à prouver par les estimées L^2 de Hörmander qu'on peut remplacer, dans la définition de la convexité rationnelle, "hypersurface algébrique" par "support d'une $(1,1)$-forme positive fermée". Cela résulte de l'approximation, non seulement au sens des courants, mais aussi au sens de la distance de Hausdorff des supports, d'une $(1,1)$-forme positive fermée par des hypersurfaces.

La deuxième étape consiste, pour tout $x \notin S$, à exhiber une $(1,1)$-forme ω_x positive fermée, de support contenant x et ne rencontrant pas S. Ces formes s'obtiennent par exemple en construisant une famille de fonctions ϕ_ϵ plurisousharmoniques sur $\mathbb{C}^n$, pluriharmoniques au voisinage de S et strictement plurisousharmoniques hors des voisinages tubulaires $S_\epsilon = \{d(.,S) \leq \epsilon\}$. Ces fonctions sont des déformations d'un potentiel ϕ de la forme ω, i.e d'une fonction ϕ satisfaisant $dd^c\phi = id(\bar\partial - \partial)\phi = \omega$. Dans ce but, on cherche à tirer profit de l'annulation tangentielle de $dd^c\phi$ le long de S. On veut d'abord créer une fonction proche de ϕ, dont le dd^c est nul (dans toutes les directions cette fois) à un ordre assez grand sur S. On voudrait ensuite propager l'annulation du dd^c à un petit voisinage de S. Pour cela, en occultant les problèmes dus à l'homologie de S, la démarche de [Du,Si] consiste à étendre $\phi + i\psi$ hors de S en une fonction h $\bar\partial$-plate sur S, où ψ est une primitive de $j^*d^c\phi$. La différence $\phi - \Re h$ croît alors automatiquement en $d^2(.,S)$, car ϕ est strictement plurisousharmonique. On résoud ensuite $\bar\partial h = \bar\partial u_\epsilon$ sur le voisinage tubulaire S_ϵ (qui est

pseudoconvexe car S est totalement réelle), avec des estimées L^2 donnant un contrôle de u_ϵ en ϵ^4. La fonction $\phi_\epsilon = \max(\phi, \Re(h - u_\epsilon) + \epsilon^3)$ est pluriharmonique sur un petit voisinage de S, mais est égale à ϕ en-dehors de S_ϵ du fait de la croissance de $\phi - \Re h$.

1.2 Résumé de la démonstration du cas immergé

Dans le cas où S est seulement immergée, la présence des points doubles rend impossible, sans travail supplémentaire, le prolongement $\bar\partial$-plat. Par ailleurs, même si ce problème est résolu, la différence $\phi - \Re h$ ne croît plus automatiquement au voisinage des points doubles.

Les deux étapes de la démonstration du cas plongé nécessitent chacune une résolution du $\bar\partial$: d'abord pour créer une forme fermée de type $(1,1)$, positive à support hors de S, ensuite pour approcher son support par une hypersurface. Notre premier lemme condense les deux étapes en une seule : la platitude du $\bar\partial$ de l'extension h suffit à repousser hors de S une hypersurface passant par un point du complémentaire.

On conserve néanmoins une partie de la deuxième étape précédente : il nous faut modifier ω pour l'annuler au voisinage des points doubles tout en conservant le caractère lagrangien de S. Si ϕ est un potentiel de la forme modifiée, on construit une fonction h globale $\bar\partial$-plate sur S, dont la partie réelle est une extension de $\phi_{|S}$ hors de S, avec h holomorphe près des points doubles.

La croissance en $d^2(.,S)$ de $\phi - \Re h$ est encore assurée là où ϕ est strictement plurisousharmonique, mais plus au voisinage des points doubles. Nous modifions alors ϕ sans changer $\phi_{|S}$ pour la rendre strictement plurisousharmonique à l'endroit crucial : la trace sur S de la frontière du support de ω. Cette ultime modification est technique, et se fonde essentiellement sur la convexité polynomiale de la réunion du cylindre unité $\{|\Re z| \leq 1\}$ et de l'espace totalement réel $\mathbb{R}^n$, ou de la boule et de $\mathbb{R}^n$, dont l'étude remonte au moins à Smirnov et Chirka ([Ch,Sm], voir aussi [Bo]). Plus précisément, nous explicitons une fonction plurisousharmonique positive s'annulant exactement sur une de ces deux figures.

Remerciements. Je tiens à remercier Julien Duval, qui m'a donné ce sujet de recherche, pour son soutien continu durant ce travail, pour la richesse de ses intuitions géométriques, et enfin pour ses patientes relectures de cet article.

2 Preuve du théorème

2.1 Un lemme pour la convexité rationnelle

Dans toute la suite, S désignera une sous-variété C^∞ immergée à points doubles ordinaires, totalement réelle de dimension moitié, compacte et sans bord. L'énoncé suivant permet, dans le cas plongé, de construire directement une hypersurface passant par un point du complémentaire de S, à partir d'une fonction $\bar\partial$-plate sur S :

Soit ϕ strictement plurisousharmonique C^∞ sur $\mathbb{C}^n$ et S plongée. S'il existe h une fonction C^∞ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\bar\partial h = O(d^m(.,S))$ *où* $m = \frac{1}{2}(3n+5)$,
- $|h| = e^\phi$ *à l'ordre 1 sur S,*

alors S est rationnellement convexe.

L'existence de h est naturelle, car elle implique que S est lagrangienne pour $dd^c\phi$.

Cet énoncé n'est pas suffisant dans le cas immergé, et sera la conséquence du lemme suivant :

Lemme 1 *Soit ϕ plurisousharmonique C^∞ sur $\mathbb{C}^n$, et h une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}^n$ telle que $|h| \leq e^\phi$, avec :*

- $\bar\partial h = O(d^{\frac{3n+5}{2}}(.,S))$
- *$|h| = e^\phi$ à l'ordre 1 sur S, et $X = \{|h| = e^\phi\}$ compact,*
- *pour tout x de X, une des deux conditions suivantes est remplie :*
  1) h est holomorphe sur un voisinage de x
  2) x est un point régulier de S, et ϕ est strictement plurisousharmonique en x.

Alors X est rationnellement convexe.

Ce lemme nous permet de travailler avec une fonction ϕ seulement plurisousharmonique, avec les conditions, entre autres, qu'elle soit strictement plurisousharmonique aux points réguliers de S près desquels h n'est pas holomorphe, et que h soit holomorphe près des points doubles.

Le premier énoncé est un corollaire de ce lemme, car *dans le cas où ϕ est strictement plurisousharmonique, $\phi - \log|h|$ croît automatiquement en $d^2(.,S)$*, si bien qu'on peut prendre $X = S$. En effet, puisque $\bar\partial h = O(d^2(.,S))$, $dd^c h$ est nulle sur S. Donc $\psi = \phi - \log|h|$ est strictement plurisousharmonique sur un voisinage de S, et s'annule à l'ordre 1 sur S. Grâce à un paramétrage local de S par $\mathbb{R}^n$ d'extension $\bar\partial$-plate, donné par le lemme 2, on peut se ramener au cas où $S = \mathbb{R}^n$. Si $x = \Re z$ et $y = \Im z$, on a donc

$$\psi(x+iy) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_j \partial y_k}(x) y_j y_k + O(|y|^3).$$

Par ailleurs, la hessienne réelle sur $\mathbb{R}^n$ de ψ coïncide à un facteur positif près avec sa hessienne complexe qui est définie positive. Donc $\psi(z) \geq A|y|^2$ pour un $A > 0$.

Démonstration du lemme 1: Soit B une boule contenant X, et $x_0 \in B \setminus X$. Il nous faut trouver une hypersurface évitant X et passant par x_0. Quitte à multiplier h par une fonction valant 1 sur un voisinage de X mais nulle près de x_0, on peut supposer que h s'annule sur une petite boule centrée en x_0. Soit $u = h^N$, où N est un entier naturel qu'on fera tendre vers l'infini. Définissons le poids plurisousharmonique ψ par $\psi(z) = 2N\phi(z) + 2n \ln|z - x_0| + |z|^2$. Grâce au théorème de Hörmander (cf. [Hö]), nous résolvons l'équation $\bar\partial v = \bar\partial u$ sur la boule, avec l'estimation $\|v\|^2_\psi \leq C\|\bar\partial u\|^2_\psi$, et C ne dépendant que de la boule. L'inégalité s'écrit :

$$\int_B \frac{|v|^2 e^{-2N\phi - |z|^2}}{|z-x_0|^{2n}} d\lambda \leq C \int_B \frac{|\bar\partial u|^2 e^{-2N\phi - |z|^2}}{|z-x_0|^{2n}} d\lambda.$$

La première intégrale converge, donc $v(x_0) = 0$, et l'hypersurface définie par $\{f = v - u = 0\}$ passe par x_0. Pour vérifier qu'elle ne rencontre pas X, il suffit de trouver N assez grand, tel que $|v(z)| \leq \frac{1}{2} e^{N\phi(z)}$ pour tout $z \in X$. Par le lemme de Hörmander-Wermer ([Hö,We]), on a, pour $z \in X$ et $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |v(z)|^2 &\leq C_1 \left(\epsilon^2 \|\bar\partial v\|^2_{L^\infty B(z,\epsilon)} + \epsilon^{-2n} \|v\|^2_{L^2(B(z,\epsilon))} \right) \\ &\leq C_1 \left(N^2 \epsilon^2 \|\bar\partial h\ h^{N-1}\|^2_{L^\infty(B(z,\epsilon))} + \epsilon^{-2n} \|v e^{-\frac{\psi}{2}} e^{\frac{\psi}{2}}\|^2_{L^2(B(z,\epsilon))} \right). \end{aligned}$$

Sur la boule $B(z,\epsilon)$, on a $|h(x)| \leq e^{\phi(z) + c\epsilon}$, où $c = \|\phi\|_{C^1(B)}$. D'où

$$\begin{aligned} \|\bar\partial h\ h^{N-1}\|^2_{L^\infty(B(z,\epsilon))} &\leq C_2 e^{2N\phi(z)} e^{2Nc\epsilon} \|\bar\partial h\|^2_{L^\infty(B(z,\epsilon))}, \\ \|v e^{-\frac{\psi}{2}} e^{\frac{\psi}{2}}\|^2_{L^2(B(z,\epsilon))} &\leq C_3 e^{2N\phi(z)} e^{2Nc\epsilon} \|v e^{-\frac{\psi}{2}}\|^2_{L^2(B(z,\epsilon))}. \end{aligned}$$

Choisissons $\epsilon = \frac{1}{N}$. L'inégalité devient

$$|v(z)|^2 \leq C_4 e^{2N\phi(z)} \left(\|\bar{\partial} h\|^2_{L^\infty(B(z,\frac{1}{N}))} + N^{2n} \|v e^{-\frac{\psi}{2}}\|^2_{L^2(B(z,\frac{1}{N}))} \right).$$

On a $\bar{\partial} h(x) = O(d^{\frac{3n+5}{2}}(x,S))$, tandis que $\bar{\partial} h(x) \equiv 0$ au voisinage de $z \in X$ si z n'est pas un point régulier de S. Dans tous les cas, $\|\bar{\partial} h\|^2_{L^\infty(B(z,\frac{1}{N}))} \leq C_5 \frac{1}{N^{3n+5}} \underset{N\to\infty}{\to} 0$.
Pour le second terme de la parenthèse, on a :

$$\begin{aligned} N^{2n} \|v e^{-\frac{\psi}{2}}\|^2_{L^2(B(z,\frac{1}{N}))} &\leq N^{2n} \|v\|^2_\psi \\ &\leq C\ N^{2n} \|\bar{\partial} u\|^2_\psi \\ &\leq C' N^{2n+2} \int_B |\bar{\partial} h|^2 \left(|h| e^{-\phi}\right)^{2N}. \end{aligned}$$

Soit $\alpha > 0$. Nous allons couper l'intégrale en deux, l'une ayant pour domaine le voisinage tubulaire de S de taille $1/N^\alpha$, l'autre le complémentaire dans la boule :

$$\begin{aligned} N^{2n+2} \int_{Tub(S,\frac{1}{N^\alpha})} |\bar{\partial} h|^2 \left(|h| e^{-\phi}\right)^{2N} &\leq N^{2n+2} \int_{Tub(S,\frac{1}{N^\alpha})} |\bar{\partial} h|^2 \\ &\leq c N^{2n+2} \left(\frac{1}{N^\alpha}\right)^{3n+5} \left(\frac{1}{N^\alpha}\right)^n. \end{aligned}$$

Il suffit donc, pour que cette intégrale tende vers 0 quand N tend vers l'infini, de prendre

$$\alpha > \frac{2n+2}{4n+5}.$$

Pour majorer la deuxième partie de l'intégrale, rappelons qu'au voisinage d'un point régulier de S où ϕ est strictement plurisousharmonique, on a l'estimation $\phi - \log|h| \geq a d^2(z,S)$, où a est une constante strictement positive. Par ailleurs, d'après l'alternative donnée par les hypothèses du lemme, un point $x \in B$ ou bien se trouve dans une boule centrée en un point de X et sur laquelle h est holomorphe, ou bien appartient à une région proche de S où la minoration précédente est valable, ou bien enfin se situe hors de ces deux ensembles, et dans ce dernier cas $|h|e^{-\phi} \leq k < 1$ près de x (k est une constante uniforme). Par conséquent

$$\begin{aligned} N^{2n+2} \int_{B \setminus Tub(S,\frac{1}{N^\alpha})} |\bar{\partial} h|^2 \left(|h| e^{-\phi}\right)^{2N} &\leq c N^{2n+2} \int_{B \setminus Tub(S,\frac{1}{N^\alpha})} \left(1 - a d^2(x,S)\right)^{2N} \\ &+ c' N^{2n+2} k^{2N}. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est inférieure à

$$c' N^{2n+2} \left(1 - \frac{a}{N^{2\alpha}}\right)^{2N} \sim c' N^{2n+2} \exp(-2aN^{1-2\alpha}),$$

tandis que $N^{2n+2} k^{2N} \to 0$. Il suffit donc de choisir, pour que cette partie de l'intégrale converge vers 0 quand N tend vers l'infini :

$$\alpha < 1/2.$$

Cette condition est compatible avec la précédente. On peut alors prendre N assez grand indépendamment de $z \in S$, de sorte que $|v(z)| \leq \frac{1}{2}e^{N\phi(z)}$. On aura $|f(z)| = |e^{N\phi(z)} - v(z)| \geq \frac{1}{2}e^{N\phi(z)} \neq 0$, et l'hypersurface évite X. $\Box$

La démonstration du théorème se ramène maintenant à satisfaire les conditions du lemme 1. Plus précisément, nous allons construire des ensembles X contenus dans la réunion de S avec des voisinages des points doubles, asymptotiquement proches de boules aussi petites que l'on veut. S sera alors rationnellement convexe.

Pour le confort du lecteur, nous supposerons dorénavant que S possède un unique point double en l'origine. Dans le paragraphe 2.2, nous annulons la forme de Kähler sur une petite boule centrée sur 0, tout en laissant S lagrangienne. Ensuite, dans le paragraphe 2.3, nous exhibons le prolongement h $\bar{\partial}$-plat sur S et holomorphe au voisinage de l'origine. La construction de h est globale, mais la démonstration est identique s'il y a plus d'un point double. Enfin, dans le paragraphe 2.4, nous relevons ϕ en une fonction strictement plurisousharmonique sans changer $\phi_{|S}$, près de 0 et précisément à l'endroit où ϕ n'est pas encore strictement plurisousharmonique mais où h perd son caractère holomorphe.

2.2 Annulation de ω au voisinage du point double

Quitte à retrancher la partie réelle d'un polynôme quadratique à un potentiel ϕ de ω, on peut supposer que ϕ est strictement convexe au voisinage de l'origine, et que 0 est un minimum local strict pour ϕ. Par un changement linéaire de coordonnées, on se ramène au cas où $\phi(z) = |z|^2 + O(|z|^3)$. La proposition suivante annule la forme ω sur une petite boule contenant 0, mais sans changer ω hors d'une boule plus grande, tout en conservant le caractère lagrangien de S. De plus le domaine d'incertitude concernant la stricte positivité de la forme transformée doit être aussi petit qu'on veut. La taille de ce no man's land sera en effet prescrite par l'angle formé par les deux branches de S en l'origine.

Proposition 1 *Soit S et ω comme ci-dessus. Alors pour tout couple de boules assez petites et centrées sur le point double, il existe une* $(1,1)$*-forme $\tilde{\omega}$ positive telle que :*

- *S est lagrangienne pour $\tilde{\omega}$,*
- *$\tilde{\omega}$ est nulle sur la plus petite boule,*
- *$\tilde{\omega} = \omega$ hors de la seconde boule.*

Démonstration : Nous allons construire, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, une fonction ζ_ϵ telle que $j^*d^c\zeta_\epsilon = j^*d^c\phi$ sur une boule b_ϵ de taille ϵ, de support contenu dans une boule un peu plus grande b_ϵ^+, avec $j^*dd^c\zeta_\epsilon = 0$, et telle que les dérivées d'ordre $k = 0, 1, 2$ soient contrôlées par $|z|^{3-k}$, uniformément en ϵ. Dans ce cas la fonction $\phi_\epsilon = \phi - \zeta_\epsilon$ reste strictement plurisousharmonique, vérifie $j^*d^c\phi_\epsilon = 0$ sur b_ϵ, $j^*dd^c\phi_\epsilon = 0$ et $\phi_\epsilon(z) = |z|^2 + O(|z|^3)$. Soit alors ρ une fonction positive C^∞, convexe et croissante définie sur $\mathbb{R}$, nulle pour t assez petit et valant $t - c$ pour t un peu plus grand. Si les paramètres de ρ sont choisis de façon adéquate en fonction des deux petites boules, la (1,1)-forme positive $\tilde{\omega} = dd^c(\rho \circ \phi_\epsilon)$ est nulle sur une boule b_ϵ^- proche de b_ϵ, est égale à $dd^c\phi_\epsilon$ hors de b_ϵ et donc à $dd^c\phi$ hors de b_ϵ^+. Sachant que $j^*d^c(\rho \circ \phi_\epsilon) = 0$ sur b_ϵ, on vérifie alors aisément que S reste lagrangienne pour $\tilde{\omega}$.

Nous démontrons maintenant l'existence de ζ_ϵ. Nous construisons en fait ζ_1 et ζ_2, deux fonctions réalisant les propriétés requises par ζ_ϵ, mais pour $S = S_1$ et $S = S_2$, où S_1 et S_2 sont les deux branches de S en 0. Si γ_1 est une fonction C^∞ définie sur la sphère unité S^{2n-1}, égale à 1 sur un voisinage de l'intersection de T_0S_1 avec S^{2n-1}, et nulle sur un voisinage de l'intersection de T_0S_2 avec la sphère, alors les dérivées d'ordre $k = 0, 1$ ou 2 de la fonction $\tilde{\zeta}_1(z) = \gamma_1(\frac{z}{|z|})\zeta_1(z)$ sont encore en $O(|z|^{3-k})$ uniformément en ϵ. La fonction $\zeta_\epsilon = \tilde{\zeta}_1 + \tilde{\zeta}_2$ est celle que nous recherchions ($\tilde{\zeta}_2$

est construite comme $\tilde{\zeta}_1$, mutatis mutandis). Dans le reste de ce paragraphe, nous pouvons donc supposer que S est plongée en 0.

La forme $j^*d^c\phi$ est fermée, donc possède une primitive λ définie près de 0 sur S. Par ailleurs on peut la choisir telle que $\lambda(z) = O(|z|^3)$, car $j^*d^c\phi(z) = O(|z|^2)$. En effet, dans nos coordonnées, $P = T_0S$ est lagrangien pour la forme standard $\omega_0 = dd^c|z|^2$. Il est facile de vérifier que $j_P^*d^c|z|^2 = 0$, où j_P est l'injection de P dans $\mathbb{C}^n$. L'estimation s'en déduit.

On coupe cette fonction en $\lambda_\epsilon(z) = \chi(\frac{z}{\epsilon})\lambda(z)$ par une fonction plateau valant 1 sur la boule de rayon ϵ, et de support dans une boule un peu plus grande. On vérifie aisément que les dérivées d'ordre $k = 0, 1, 2, 3$ sont contrôlées par $|z|^{3-k}$, et cela uniformément en ϵ. Nous voulons maintenant trouver une fonction ζ_ϵ telle que $j^*d^c\zeta_\epsilon = d\lambda_\epsilon$. Il suffit de prendre ζ_ϵ nulle sur S et de spécifier ses dérivées le long des directions transverses à TS, ce qui est possible car S est totalement réelle : si $S = \mathbb{R}^n$ et $d\lambda_\epsilon = \sum_i \alpha_i(x)dx_i$, la fonction $\zeta_\epsilon(z) = \sum_i \alpha_i(x) \cdot y_i$ convient, et ses dérivées d'ordre $k = 0, 1, 2$ sont estimées par $|z|^{3-k}$ uniformément en ϵ. Dans le cas général, on se ramène au cas précédent par le lemme classique ci-dessous. □

Lemme 2 *Soit S une sous-variété lisse de $\mathbb{C}^n$ passant par 0, avec T_0S totalement réel. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un difféomorphisme local ψ fixant 0 tel que $\psi(S) \subset \mathbb{R}^n$ et $\bar{\partial}\psi(z) = O(d^m(z, S))$.*

Démonstration : On peut supposer que $T_0S = \mathbb{R}^n$. Il existe $\phi : S \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme local près de 0 tangent à l'identité. Posons $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_n)$. D'après [Hö, We], on peut prolonger chaque ϕ_k en ψ_k en dehors de S, avec $\psi_{k|S} = \phi_{k|S}$, et $\bar{\partial}\psi_k = O(d^m(., S))$. Donc $D_0\psi$ est $\mathbb{C}$-linéaire et l'identité sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit que ψ est tangent à l'identité et donc qu'elle est un difféomorphisme local. □

2.3 Construction d'une extension $\bar{\partial}$-plate

Soit ϕ un potentiel de $\tilde{\omega}$, la forme fournie par la proposition 1 pour un couple de petites boules centrées sur le point double. Rappelons que ϕ est nulle sur la petite boule et strictement plurisousharmonique hors de la seconde. Il s'agit maintenant de construire une fonction h $\bar{\partial}$-plate sur S et telle que $\phi - \log|h|$ s'annule à l'ordre 1 sur S. Ces deux contraintes entraînent $j^*(d^c\phi - d(\arg h)) = 0$. Autrement dit, la 1-forme fermée $j^*d^c\phi$ doit avoir des périodes entières (ou plus généralement rationnelles, quitte à multiplier ϕ par un entier). Comme dans [Du,Si], il nous faut perturber ϕ pour réaliser cette condition.

Soit $\tilde{S}$ un ouvert lisse de $\mathbb{C}^n$ tel que S soit un retract par déformation de $\tilde{S}$. On a alors $H_1(\tilde{S}, \mathbb{Z}) \simeq H_1(S, \mathbb{Z})$. Soit $\gamma_1, \cdots, \gamma_p$ une base de $H_1(\tilde{S}, \mathbb{Z})$, qu'on peut supposer supportée par S. D'après le théorème de De Rham, il existe des 1−formes fermées $\beta_1, \cdots, \beta_p$ sur $\tilde{S}$, telles que $\int_{\gamma_i} \beta_j = \delta_{ij}$. On peut choisir ces formes nulles sur une boule b contenant le point double de S, et telle que $2b \Subset \tilde{S}$. Il suffit pour cela de prendre une primitive f_j de chaque β_j sur $2b$, et χ une fonction plateau nulle sur b et valant 1 hors de $2b$. La 1-forme $\chi\beta_j + f_j d\chi$ est dans la même classe que β_j et s'annule sur b. Il est alors possible de trouver $\psi_1, \cdots, \psi_p$ à support compact dans $\mathbb{C}^n$, vérifiant $j^*d^c\psi_j = j^*\beta_j$, et $\psi_j \equiv 0$ sur b. En effet, on peut fixer $\psi_j \equiv 0$ sur $S \cup b$, et spécifier ses dérivées dans les directions contenues dans iT_zS (cf. démonstration de la proposition 1).

Posons maintenant $\phi_\lambda = \phi + \lambda_1\psi_1 + \cdots + \lambda_p\psi_p$. On a $\phi_\lambda = \phi$ sur $S \cup b$. Pour $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ assez petit, ϕ_λ est encore strictement plurisousharmonique en dehors de la plus grande des deux petites boules et plurisousharmonique sur b. On peut de plus trouver M entier et choisir λ, tels que $\int_{\gamma_i} j^*d^c\phi_\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}/M$ pour $1 \leq i \leq p$. Posons $\tilde{\phi} = M\phi_\lambda$. La forme $j^*d^c\tilde{\phi}$ est fermée sur S et ses périodes sont des multiples de 2π. Il existe donc une fonction C^∞ $\mu : S \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, telle que $j^*d^c\tilde{\phi} = d\mu$. On peut évidemment choisir μ nulle sur l'intersection de S avec la petite boule. D'après [Hö,We], pour tout entier m, il existe une fonction h définie sur $\mathbb{C}^n$, telle que $h_{|S} = \exp(\tilde{\phi} + i\mu)_{|S}$

avec $\bar\partial h(z) = O(d^m(z,S))$. Automatiquement, $\tilde\phi - \log|h|$ s'annule à l'ordre 1 sur S. Pour ne pas alourdir les notations, nous continuons à nommer ϕ la nouvelle fonction $\tilde\phi$.

Dans le paragraphe suivant, nous rendons ϕ strictement plurisousharmonique sur un petit ouvert contenant l'intersection de S avec le no man's land où l'on ne sait rien sur la stricte positivité de $dd^c\phi$, et ce sans changer $\phi_{|S}$. On peut alors prolonger h par 1 sur un voisinage du point double, de sorte que $X = \{e^\phi = |h|\}$ soit un compact vérifiant les conditions du lemme 1. □

2.4 Relèvement de ϕ

Comme il a été annoncé précédemment, il est nécessaire maintenant de relever ϕ pour la rendre strictement plurisousharmonique sur un petit voisinage de $\partial(\text{support } dd^c\phi)\cap S$, i.e là où $h_{|S}$ ne peut plus être prolongée de façon holomorphe et où ϕ n'est pas encore strictement plurisousharmonique. On peut supposer que $T_0S_1 = \mathbb{R}^n$.

Nous quantifions la latitude donnée par la proposition 1 sur le choix des petites boules : prenons δ, telle que $T_0S_2 \cap B(0, 1+4\delta) \subset \{|x| \le 1\}$ (cf. Fig. 1 ; rappelons que $x = \Re z$ et $y = \Im z$). On peut alors choisir les deux boules de sorte qu'il soit suffisant de relever ϕ entre $B(0,(1+2\delta)\epsilon)$ et $B(0,(1+3\delta)\epsilon)$ au voisinage de S_1 et de S_2.

Nous construisons d'abord une fonction χ_ϵ plurisousharmonique sur un voisinage tubulaire de S_1 de taille $\sim \epsilon$, nulle sur S_1 et sur le cylindre $\{|x| \le (1+\delta)\epsilon\}$, et croissant entre les deux boules en $d^2(z,S_1)$. Nous avons ensuite besoin de la prolonger hors du tube par une fonction ψ plurisousharmonique nulle sur S_2, au moins sur la boule hors de laquelle ϕ est strictement plurisousharmonique. A l'extérieur de cette boule, on pourra couper ψ en profitant de la stricte plurisousharmonicité de ϕ. Le lemme suivant fournit cette fonction, et prouve la convexité polynomiale de la réunion du cylindre et de $\mathbb{R}^n$:

Lemme 3 *Il existe une fonction ψ C^∞, plurisousharmonique et positive sur $\mathbb{C}^n$, nulle exactement sur la réunion du cylindre unité $\{|x| \le 1\}$ avec $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration : Soit α une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, convexe, croissante, nulle sur $[0,1]$ et strictement positive sur $]1,\infty]$. La fonction $\psi_1(z) = \alpha(|x|)y^2$ est sous-harmonique et clôt la démonstration pour $n = 1$.

Pour $n \ge 2$, posons

$$\psi(z) = \int_{S^{n-1}} \psi_1(< z, X >) d\sigma(X),$$

où $d\sigma$ est la mesure normalisée invariante par $O_n(\mathbb{R})$ sur la sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$, et $< .,. >$ le produit scalaire hermitien canonique de $\mathbb{C}^n$. Comme intégrale de fonctions plurisousharmoniques, ψ est plurisousharmonique. Pour z appartenant à $\mathbb{R}^n$ ou au cylindre $\{|x| \le 1\}$, $\psi(z) = 0$. Vérifions maintenant que ψ est strictement positive en dehors de cette figure. Pour cela, remarquons que l'application définie sur S^{n-1} par $X \mapsto \alpha(|< x, X >|) < y, X >^2$ pour $|x| > 1$ et $y \ne 0$ s'annule sur une calotte ne couvrant pas S^{n-1} tout entière et sur l'intersection d'un hyperplan avec la sphère. Le complémentaire de la réunion de ces deux ensembles est un ouvert non vide de S^{n-1}, et donc $\psi(z) > 0$. □

Remarque : On peut prouver de la même façon la convexité polynomiale du compact L formé par la réunion de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ avec la boule de rayon 2 dans $\mathbb{R}^n$. En effet, soit dans $\mathbb{C}$ la fonction de Green G_1 de $\{|z| < 1\} \cup [-2,2]$, avec pôle logarithmique à l'infini. Comme le compact est régulier pour le problème de Dirichlet, la fonction est sousharmonique continue sur $\mathbb{C}$, positive et nulle précisément sur le compact. La fonction G définie par une intégrale analogue à celle de ψ dans le lemme ci-dessus est plurisousharmonique et positive, nulle précisément sur le compact L. En particulier ses sous-niveaux produisent directement une base de voisinages pseudoconvexes de la figure L (comparer à [Bo]).

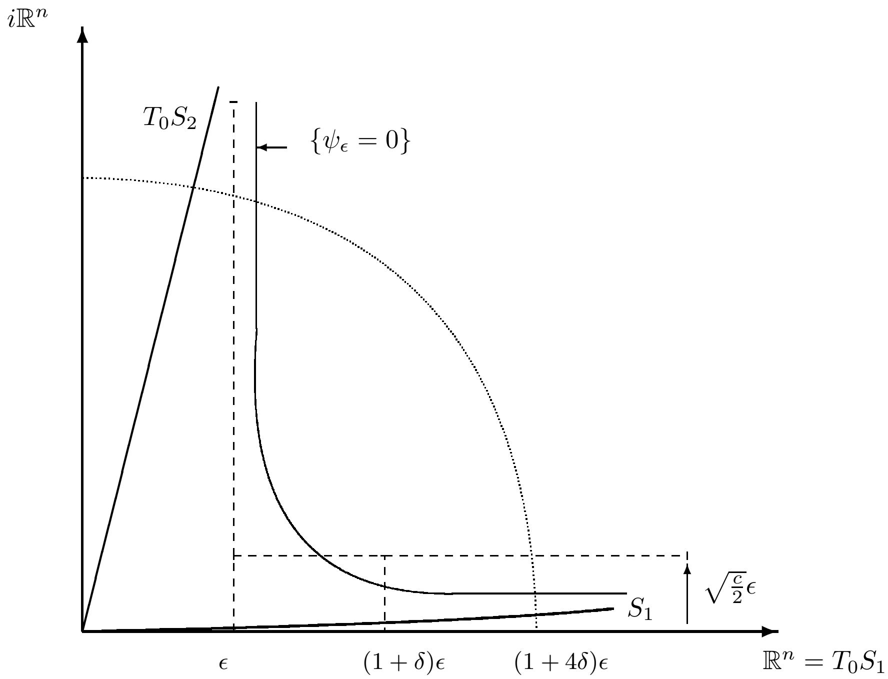

Fig. 1

Nous construisons maintenant la fonction χ_ϵ. Soit pour cela χ une fonction C^∞ négative, telle que $\chi(t) = -1$ pour $t \leq 1+\delta$, et $\chi(t) = 0$ pour $t \geq 1+2\delta$. Posons

$$\chi_\epsilon(z) = \max\left(d_1^2(z) + c\epsilon^2\chi(\frac{|x|}{\epsilon}), 0\right),$$

où d_1 est la distance à S_1. Puisque $\|\epsilon^2\chi(\frac{|x|}{\epsilon})\|_{C^2} = O(1)$, et que d_1^2 est strictement plurisousharmonique sur un voisinage fixe de S_1, $d_1^2(z) + c\epsilon^2\chi(\frac{|x|}{\epsilon})$ l'est encore pour ϵ et c assez petits ($c \sim \delta^2$), et χ_ϵ est plurisousharmonique. Notons que si ϵ est assez petit, pour $|y| \leq \sqrt{\frac{c}{2}}\epsilon$ et $|x| \leq (1+\delta)\epsilon$, $\chi_\epsilon \equiv 0$ (car $d_1(z) = |y| + O(|y|^2)$), tandis que pour $(1+2\delta)\epsilon \leq |x|$, $\chi_\epsilon \equiv d_1^2$.

Nous prolongeons maintenant cette fonction de façon plurisousharmonique en dehors du tube $|y| = \sqrt{\frac{c}{2}}\epsilon$. Nous utilisons pour cela la fonction ψ donnée par le lemme 3. On démontre facilement qu'il existe une constante $k > 1$, telle que pour $(1+\delta) \leq |x| \leq (1+4\delta)$, on ait l'estimation $k^{-1}|y|^2 < \psi(z) < k|y|^2$. La fonction

$$\psi_\epsilon(z) = \psi(\frac{z}{\epsilon}) - \frac{c}{4k}$$

vérifie, pour $(1+\delta)\epsilon \leq |x| \leq (1+4\delta)\epsilon$, et ϵ assez petit, $\psi_\epsilon > \frac{c}{4k}$ sur $|y| = \sqrt{\frac{c}{2}}\epsilon$ et $\psi_\epsilon < 0$ sur S_1 (cf. Fig. 1). Or $\chi_\epsilon \leq \frac{c}{2}\epsilon^2$ sur le bord du tube. Donc la fonction $\max(\psi_\epsilon, \chi_\epsilon)$ est plurisousharmonique, nulle sur S_1 et sur $S_2 \cap B(0, (1+4\delta)\epsilon)$, et est strictement plurisousharmonique sur un voisinage de S_1 entre $B(0, (1+\delta)\epsilon)$ et $B(0, (1+4\delta)\epsilon)$. Si γ est une fonction plateau valant 1 sur $B(0, (1+4\delta)\epsilon)$ et nulle peu après, la fonction $\phi + a\gamma\max(\psi_\epsilon, \chi_\epsilon)$ est plurisousharmonique sur $\mathbb{C}^n$ pour a assez petit et reste égale à ϕ sur S. Remarquons enfin que cette construction peut se lisser. En faisant de même

sur la branche S_2, on réalise le relèvement de ϕ désiré. $\square$

Références

[Bo] B. Boonstra, *Handles for strictly pseudoconvex domains*, Preprint.

[Ch,Sm] E. M. Chirka et M. M. Smirnov *Polynomial convexity of some sets in* $\mathbb{C}^n$, Matematicheskie Zametski, Vol. 50, No 5 (1991), pp. 81-89.

[Du] J. Duval, *Une caractérisation kählerienne des surfaces rationnellement convexes*, Acta Math. 172 (1994), 77-89.

[Du,Si] J. Duval et N. Sibony, *Polynomial convexity, rational convexity, and currents*, Duke Math. J. 79 (1995), 487-513.

[Gr] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307-347.

[Hö] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[Hö,We] L. Hörmander et J. Wermer, *Uniform approximation on compact sets in* $\mathbb{C}^n$, Math. Scand. 23 (1968), 5-21.

D. Gayet : Laboratoire Emile Picard, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex France.
E-mail : gayet@picard.ups-tlse.fr